# Бесконечные ряды и Вселенная

Путенихин П.В.
m55@mail.ru

**Аннотация**

В литературе по математике и космологии можно встретить рассуждения о бесконечностях, в которых делается ошибочный вывод о том, что в бесконечности часть может быть равна целому.

В литературе по математике и космологии можно встретить рассуждения о бесконечностях, в которых делается ошибочный вывод о том, что в бесконечности часть может быть равна целому.

«множество натуральных чисел ($\mathbb{N}$) равномощно множествам целых чисел ($\mathbb{Z}$), чётных натуральных чисел, всех рациональных чисел ($\mathbb{Q}$), а отрезок числовой прямой ($\mathbb{I} = [0, 1]$, континуум) оказывается в биективном соответствии со всей числовой прямой ($\mathbb{R}$), а также с ***n***-мерным евклидовым пространством ($\mathbb{R}^n$)» [1].

«… число четных чисел равно числу всех чисел натурального ряда. …когда мы переходим к бесконечности, все меняется и часть может равняться целому… » [2].

Для доказательства этого предлагается записать четные числа в виде бесконечного ряда, а под этим рядом написать их порядковые номера из натурального ряда чисел:

2, 4, 6, 8, ... (1)
1, 2, 3, 4, ...

Здесь каждому четному числу соответствует один порядковый номер из натурального ряда чисел и наоборот. Значит, делается вывод, число четных чисел равно числу всех чисел натурального ряда. На первый взгляд это противоречит нашей интуиции. Ведь четные числа составляют лишь половину всех чисел. Это действительно так для любой конечной совокупности чисел, но не соответствует бесконечным рядам. Для бесконечных рядов получается, что их количества равны, часть равна целому!

Но это неверно. Ошибка состоит в неверном способе подсчета. Произведём подсчет другим, правильным способом. Возьмем ряд всех натуральных чисел и будем их считать самым обычным, привычным способом. Для этого каждое натуральное число будем класть в ящик и называть его: один, два, три и так далее. Одновременно, по мере того, как нам будут встречаться эти числа, мы будем с каждым четным числом класть такую же цифру во второй ящик. И, для наглядности, с каждым нечётным – в третий ящик. Ну, и для ещё большей наглядности – каждое пятое число – в четвертый ящик.

Через некоторое время посмотрим, что у нас в ящиках? Через тысячу шагов, очевидно, в первом ящике будет 1 000 чисел. Во втором и третьем – по 500, а в четвертом – только 200. Ну, или в виде соотношения 10:5:5:2.

Продолжим раскладывать числа и вновь проверим содержимое ящиков через 10 000 шагов. И в этот раз мы обнаружим, что количества чисел в ящиках соотносятся как 10:5:5:2. Нужно ли доказывать, что и через миллион, и через миллиард и через гугл ($10^{100}$) шагов количества чисел в ящиках будут соотноситься как 10:5:5:2? И так до бесконечности.

Если мы последовательно синхронно считаем количества чисел в натуральном ряду, то мы найдём истинное соотношение их количеств. Однако, говорить, что бесконечное число всех натуральных чисел больше или меньше, чем число всех четных или нечетных чисел неправильно. Эти числа образуют бесконечности, и правильным будет говорить только об их мощности:

*бесконечность всех натуральных чисел в два раза мощнее, чем бесконечности всех четных или нечетных чисел и в пять раз мощнее, чем бесконечность всех чисел, кратных пяти.*

Кстати, также неправильно говорить в отношении бесконечностей, что часть может равняться целому. Они не равны, но правильно это произносится так: мощность части бесконечности всегда меньше мощности всей бесконечности.

Рассмотрим приведённый выше пример в терминах мощностей. Примем без доказательства, что количество членов множества и его мощность – это разные, но схожие по смыслу понятия. Мы не можем сравнивать числа членов множеств, по определению равных бесконечности, но мы можем сравнивать их мощности. Отношение мощностей $M_1$ и $M_2$ равномощных множеств всегда равно конечному, ненулевому числу ***c***:

$$c = \frac{M_1}{M_2} = const \neq 0$$

В этом случае отношение множеств (1) для четных чисел запишется в виде:

$$\frac{2,4,6,8...}{1,2,3,4...} = c_{2n}$$

Запишем также и отношение множеств для нечетных чисел:

$$\frac{1,3,5,7...}{1,2,3,4...} = c_{2n+1}$$

Далее нам понадобится и такое тождественное отношение:

$$\frac{1,2,3,4...}{1,2,3,4...} = c_n = 1$$

Это равенство очевидно, поскольку числитель равен знаменателю. Теперь просуммируем два отношения мощностей:

$$c_{2n} + c_{2n+1} = \frac{2,4,6,8...}{1,2,3,4...} + \frac{1,3,5,7...}{1,2,3,4...} = \frac{1,3,5,7... + 2,4,6,8...}{1,2,3,4...}$$

Очевидно, что последняя дробь содержит в числителе все целые натуральные числа:

$$c_{2n} + c_{2n+1} = \frac{1,3,5,7... + 2,4,6,8...}{1,2,3,4...} = \frac{1,2,3,4,5,6,7,8...}{1,2,3,4...} \equiv c_n = 1$$

поэтому тождественно равна единице.

Это определённо означает, что мощность множества всех натуральных чисел и сумма мощностей множеств всех четных и нечетных чисел равны. Но это также означает и равенство их бесконечного числа членов. Очевидно, что множества четных и нечетных чисел равномощны, поэтому, разделив полученное равенство на $c_n$, получим:

$$\frac{c_{2n}}{c_n}+\frac{c_{2n+1}}{c_n}=\frac{1}{c_n}=1$$

Из равенства (и правил счета) следует, что мощности четных и нечётных чисел в два раза «слабее» мощности всех натуральных чисел:

$$\frac{c_{2n}}{c_n}=\frac{c_{2n+1}}{c_n}=\frac{1}{2}$$

Отметим также без доказательств, что любые действия над каждым членом множества не изменяют мощности множества:

$$M_f(a_i)=f(a_1),f(a_2),f(a_3),f(a_4)...\equiv M(a_i)$$

Из этого непосредственно следует, что решающее значение имеет способ, каким получено множество. Например, множество всех четных чисел может быть получено удалением из множества всех натуральных чисел нечётных или умножением на 2 каждого члена множества всех натуральных чисел:

$$\mathrm{M}(1,2,3,4\ldots)\equiv\mathrm{M}(1\times2,2\times2,3\times2,4\times2\ldots)$$

Казалось бы, последнее выражение является точной копией множества всех четных чисел M(2, 4, 6, 8…). Но это ошибочно, поскольку любые действия над всеми (или отдельными) членами множества не изменяют их полного количества и, соответственно, мощности. Поэтому справедливо:

$$\frac{2,4,6,8...}{1,2,3,4...}=\frac{c_{2n}}{c_n}=\frac{2,4,6,8...}{1,2,3,4...}=\frac{1}{2}\neq\frac{c_{n\times2}}{c_n}=\frac{(1,2,3,4...)\times2}{1,2,3,4...}=\frac{2_{2\times},4_{2\times},6_{2\times},8_{2\times}...}{1,2,3,4...}\equiv1$$

Хотя оба множества в числителях выглядят тождественно, на самом деле это разные множества, имеющие разную мощность.

Можно привести не менее интересный пример подобного «вырезания» элементов множества. Известна сумма следующего ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\ldots=2$$

Выделим из этого ряда четные члены, оставив в нём нечетные:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots-\textit{четные}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{512}+\ldots-\textit{нечетные}$$

Теперь умножим второй ряд из нечетных членов на 2:

$$2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{512}+\ldots\right)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots$$

В результате мы получаем первый полу-ряд, остаток исходного, состоящий из четных членов. При этом мы видим, что для полученных рядов сумма ряда из четных членов исходного ряда в два раза больше, чем сумма ряда из нечетных членов:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}=2\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}$$

Но с другой стороны это даёт нам полное право утверждать, что мы действительно уменьшили число членов исходного ряда, поскольку явно изменилась сумма членов исходного, урезанного ряда. Очевидно, она уменьшилась на две трети, то есть, в три раза:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=2\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=3\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=2$$

откуда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

Таким образом, исходный ряд, в котором остались только нечетные члены, уменьшился в три раза. Это подтверждает, что удаление членов ряда уменьшает количество его членов, его мощность, поскольку сумма ряда при таком удалении уменьшается. В свою очередь, это подтверждает справедливость правил счета, описанных выше.

Вернёмся к примеру (1) и моему утверждению о правилах счета. Очевидно, что нижний ряд из (1) можно записать как верхний ряд, каждый член которого умножен на 2:

2, 4, 6, 8, … = (1, 2, 3, 4, … )x2

При этом количество членов в новом ряду осталось прежним. Казалось бы, мы имеем полное право утверждать, что этот ряд и ряд всех четных чисел – один и тот же ряд. То есть, ряд, полученный умножением, и нижний ряд в (1) – тождественны. Поэтому, суммы этих рядов должны быть равны:

$$2\times\sum_{n=0}^{\infty}n=\sum_{n=0}^{\infty}2n$$

Однако, здесь умножение относится не к числу членов, а к сумме ряда. Поэтому:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n+\sum_{n=0}^{\infty}n=\sum_{n=0}^{\infty}2n$$

Видим, что слева счет членов множеств производится дважды – под каждым знаком суммы. Следовательно, общее число членов слева в два раза больше, чем справа. Мы приходим в (1) к абсурду:

n + n = n

Но абсурд вызван просто сравнением числа члена множеств, полученных разными способами. В первом случае сумма ряда получена удвоением каждого члена исходного множества:

$$\sum_{n=0}^{\infty}2n=\sum_{n=0}^{\infty}n$$

Числа членов во множествах равны. Во втором – суммированием всех членов исходного множества самих с собой:

$$\sum_{n=0}^{\infty}2n=\sum_{n=0}^{\infty}n+\sum_{n=0}^{\infty}n$$

Число членов в множествах справа в два раза больше, чем слева. Это и означает, что число членов множества определяется способом, каким они получены. Но почему я утверждаю, что способ «откладывания» членов множества, описанный выше, правильный? Причина проста – это естественный способ счета, когда каждый член множества *персонально* нумеруется. Собственно говоря, это и есть счет (подсчет) как таковой. Подсчет «кучкой» скрывает истинное число членов множества. Поэтому пересчет членов любого множества, взявшегося неизвестно откуда, всегда даст такое же количество, что и в натуральном ряду чисел. Важные количественные особенности (четность, нечётность, кратность пяти и прочее) такого «таинственного» ряда будут утеряны.

В этой связи также следует считать ошибочными встречающееся иногда в математической литературе утверждение, будто математик Кантор доказал, что число точек на отрезке прямой сосчитать никаким способом нельзя. Их нельзя перенумеровать с помощью бесконечного ряда натуральных чисел, приписывая каждой точке свой номер, в каком бы порядке мы ни выбирали эти точки. Всегда останется хотя бы одна точка, на которую не хватит номера!

Это неверно сформулированное утверждение. Перенумеровать бесконечное количество чего-либо, действительно, невозможно. Однако, приводимое затем доказательство, тем не менее, начинается со слов: «Представим, что вопреки нашему утверждению кому-то удалось перенумеровать точки этого отрезка». Здесь следует напомнить фундаментальный принцип классической логики и классической математики, который постулирует полное отрицание актуальной бесконечности: «***Infinitum Actu Non Datur»*** (Аристотель) – «актуальная бесконечность не существует». Принцип утверждает потенциальный, т.е. принципиально незавершаемый характер бесконечности множества. Актуальная, то есть, пересчитанная бесконечность лишена смысла. Бесконечностью может считаться лишь потенциальная бесконечность, завершить счет членов которой невозможно. Поэтому приводимое доказательство после слов «удалось перенумеровать» следует прекратить – оно ошибочно. Впрочем, в этом вопросе немецкому математику Давиду Гильберту, одному из величайших умов своего времени, приписывается особое мнение. По мнению великого математика, главное различие между актуальной и потенциальной бесконечностью заключается в следующем. Потенциально бесконечное есть нечто всегда возрастающее и имеющее пределом бесконечность, тогда как актуальная бесконечность – это завершённое целое, в действительности содержащее бесконечное число предметов [7].

Таким образом, ошибочным точно также являются и утверждения и доказательства равной мощности точек прямого отрезка и, например, квадрата со стороной, равной этому отрезку. Мощность множества точек квадрата на отрезке имеет более высокий порядок, чем мощность множества точек отрезка. То есть, больше в бесконечное число раз.

Следует отметить, что вопросы бесконечных множеств сложны не только для рядовых математиков. Слабое понимание их приписывают иной раз и величайшим специалистам в этой области. Рассмотрим рассказ, который, как считается, предложил Гильберт где-то в третьем десятилетии 20 века [2 - 6].

Представим себе гостиницу с бесконечным числом комнат. Комнаты пронумерованы натуральными числами от 1 до ∞. Однажды в гостиницу вошел человек и попросил снять комнату. К сожалению, для нового гостя не нашлось комнаты, так как отель был *полностью заполнен* бесконечным числом гостей, и не было ни одного свободного номера. Как предоставить новому гостю свободную комнату, не выселяя никого из постояльцев?

Несмотря на то, что задача явно говорит, что *все номера заняты*, утверждается, что есть возможность выделить сколько угодно свободных комнат. Для этого необходимо переселить постояльца из первой комнату во вторую, постояльца из второй комнаты в третью и так далее. То есть, каждого постояльца из комнаты с номером n необходимо переселить в комнату с номером n+1. В результате этого освобождается комната с номером один, и в неё можно поселить нового гостя.

Но это решение совершенно очевидно ошибочно. По условиям задачи определённо сказано, что свободных номеров нет! Следовательно, данный «парадокс» Гильберта является псевдопарадоксом [4]. В предложенном решении производится подмена понятий. По условиям задачи должно быть обеспечено стационарное, неизменное состояние – заполненность номеров всеми жильцами, когда все они без исключения *одновременно* заселены, когда имеется хотя бы одна ночь, в которую каждый из них спит на отдельной постели в отдельном номере отеля. Это состояние подменяется динамическим процессом, движением – непрерывным переселением постояльцев из одного номера в другой. Во-первых, этот процесс будет длиться вечность, он не может быть прерван ни на мгновение; во-вторых, даже в случае одного нового гостя, на всём протяжении процесса переселений один из постояльцев всегда будет без гостиничного номера, то есть, будет сидеть в коридоре, что является нарушением условия решения задачи. Для случаев множества новых гостей или их бесконечного числа, таких «временно не поселённых» будет соответствующее количество. Решением «парадокса», как видим, является нелепость.

Кстати, предельным случаем такого отеля является одноместный отель. Используя методику расселения из рассказа, в этом отеле можно будет разместить любое число новых постояльцев – и одного, и бесконечное множество, и бесконечное множество бесконечных множеств новых гостей. В этом случае сидеть в коридоре будут все постояльцы, кроме одного, который пробудет в номере всего лишь мгновение. Спать в этом отеле всем придётся по очереди. Поэтому, если вы увидите в отеле табличку «Свободных мест нет, но мы всё равно поселим вас», то знайте – это «Отель Гильберта». Если захотите в нём снять номер, то запаситесь спальным мешком. Какое-то время спать придётся в коридоре.

Что же касается бесконечностей во Вселенной, то, как известно, теория Большого Взрыва постулирует начало пространства и времени Вселенной, а также как один из вариантов её развития – неизбежное окончание пространства и времени в новой сингулярности. Однако, в основу теории положено довольно спорное предположение о существовании этих сингулярностей – начальной и конечной. Обновленные варианты Большого Взрыва предполагают как инфляционное расширение, так и множественность Вселенных, по сути, предполагая какое-то особое поле, всё-таки существовавшее до сингулярности. Это означает, что совсем отказаться от чего-то «до-пространственного» и «до-временн*о*го» не удаётся. В качестве такой первичной субстанции, первоосновы может выступать материя в фундаментальном, глубоком философском смысле этого слова. Наш мир в этом случае является лишь вещественным проявлением этой первичной субстанции. Она несотворима и неунечтожима, существует вечно в своём особом времени и бесконечна в своём особом пространстве. В результате изменения состояния материи, напоминающем процесс кристаллизации вещества или конденсации перегретого пара, она принимает одну из многочисленных возможных своих форм – вещественную. При этом возникают пространство и время нашей Вселенной. Очевидно, что этот этап развития – вещественный – для материи составляет лишь один краткий миг и одну из её бесчисленных форм.

**Литература**


1.Википедия. Бесконечность. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Бесконечность

2.Новиков И. Д., Черные дыры и Вселенная. — М.: Мол. гвардия, 1985. — 190 с., ил.— (Эврика), с.77, URL: http://rusnauka.narod.ru/lib/phisic/blackwhole/Novik/blackn.htm

3.Гостиница Гильберта, http://forallx.ru/posts/hilberts-hotel-solution

4.Парадокс Гильберта, URL: http://traditio-ru.org/wiki/Парадокс_Гильберта

5.Парадокс Гильберта (фильмы), URL: http://pikabu.ru/story/paradoks_gilberta_1962200, http://www.yaplakal.com/forum3/topic782267.html

6.Парадокс Гильберта, Википедия, URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Список_парадоксов

7.Крейг У., Самое начало. Происхождение Вселенной и существование Бога, URL: http://www.otkrovenie.de/beta/xml/other/samoeNachalo.xml/3

8.Путенихин П.В., Бесконечные ряды и Вселенная, 2015, [критика ошибочного вывода о том, что в бесконечности часть может быть равна целому], URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/infinitum.shtml